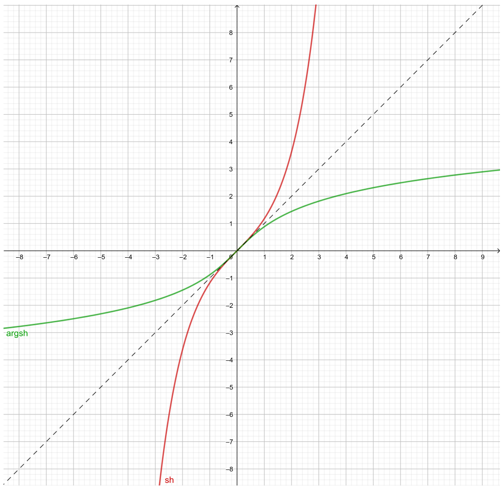
Correction du devoir maison $n°4$

Partie A : Bijection réciproque du sinus hyperbolique

1. La fonction sh est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. Donc sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x); \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x)\right[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$.
2. Tableau de variation de sh^{-1} :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\mathrm{sh}^{-1}(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

3.



4. La bijection sh est dérivable de dérivée ch. De plus, ch ne s'annule jamais.
Donc sh^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(\mathrm{sh}^{-1})'(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}'(\mathrm{sh}^{-1}(x))} = \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{sh}^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{sh}^2(\mathrm{sh}^{-1}(x))+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

5. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}(x) = y &\iff \mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x} = 2y \\ &\iff \mathbf{e}^{2x} - 2y\mathbf{e}^x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Résolvons : $X^2 - 2yX - 1 = 0$. $\Delta = 4(y^2+1)$. Donc les solutions sont $y \pm \sqrt{y^2+1}$.

$$\mathrm{sh}(x) = y \iff \mathbf{e}^x = y \pm \sqrt{y^2+1} \underset{x\in\mathbb{R} i.e. \mathbf{e}^x \geqslant 0}{\iff} \mathbf{e}^x = y + \sqrt{y^2+1} \iff x = \ln(y+\sqrt{y^2+1})$$

Conclusion : $\forall y \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}^{-1}(y) = \ln(y+\sqrt{y^2+1})$.

6. Soit $y \in \mathbb{R}$,

$$(\mathrm{sh}^{-1})'(y) = \frac{1 + \frac{2y}{2\sqrt{y^2+1}}}{y+\sqrt{y^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$

Partie B : Tangente hyperbolique et sa bijection réciproque

On définit la fonction tangente hyperbolique (notée th) comme le quotient de sinus hyperbolique sur cosinus hyperbolique c'est-à-dire

$$\mathrm{th} = \frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$$

1. th est le quotient de deux fonctions de la variable réelle dont le dénominateur ne s'annule pas, elle est donc définit sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}(-x) = \frac{\mathrm{sh}(-x)}{\mathrm{ch}(-x)} = \frac{-\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = -\mathrm{th}(x)$. Donc th est impaire.
2. th est le quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, donc th est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$$

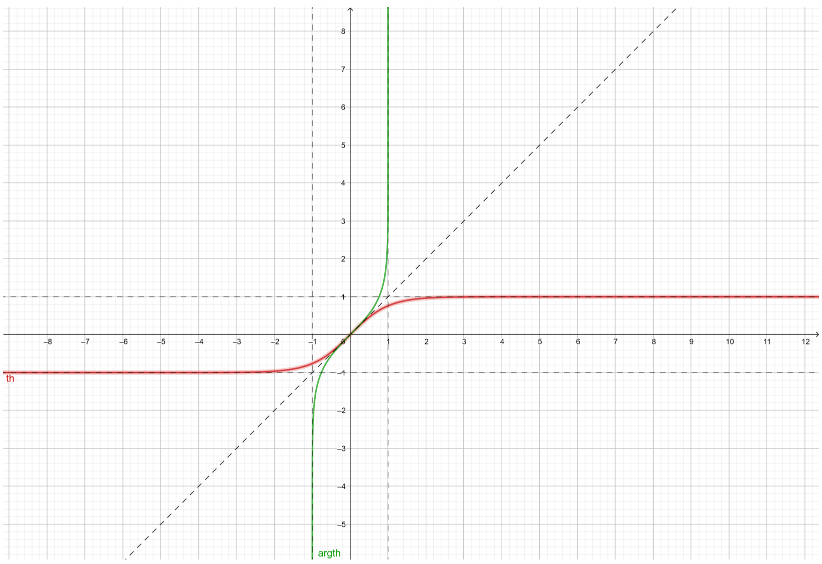
3. Tableau de variation de th :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\mathrm{th}'(x)$		$+$	
$\mathrm{th}(x)$	-1 $\nearrow$	0	$\nearrow$ 1

4. th est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. Donc th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$.
5. Tableau de variation de th^{-1} :

x	-1	1
$\mathrm{th}^{-1}(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

6.



7. La bijection th est dérivable de dérivée $\frac{1}{\mathrm{ch}^2}$. De plus, $\frac{1}{\mathrm{ch}^2}$ ne s'annule jamais.
Donc th^{-1} est dérivable sur $]-1;1[$ et $\forall x \in]-1;1[$,

$$(\mathrm{th}^{-1})'(x) = \frac{1}{\mathrm{th}'(\mathrm{th}^{-1}(x))} = \frac{1}{1 - \mathrm{th}^2(\mathrm{th}^{-1}(x))} = \frac{1}{1 - x^2}$$

8. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1;1[$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{th}(x) = y &\iff \mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x} = y(\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}) \\
&\iff (1-y)\mathbf{e}^{2x} - (1+y) = 0 \\
&\iff x = \frac{1}{2}\left(\ln(1+y) - \ln(1-y)\right)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall y \in]-1;1[, \operatorname{th}^{-1}(y) = \frac{1}{2}\left(\ln(1+y) - \ln(1-y)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$

9. Soit $y \in]-1;1[$,

$$(\operatorname{th}^{-1})'(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y}\right) = \frac{1}{1-y^2}$$

.